

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КАРТ

ЗЕМНЫЕ СФЕРА И СФЕРОИД

Сферическая модель Земля. Сфера и сфериоид - две основные геометрические модели Земли в геодезии. Ранние определения размеров сферической Земли сводились к нахождению длины дуги меридиана, соответствующей разности широт в 1° , и вычислению ее радиуса. Такие определения получили название *градусных измерений*. Размеры шара Земли указывал еще Аристотель (384-322 гг. до н. э.). Первое исторически известное определение радиуса земного шара выполнил Эратосфен (278-196 гг. до н. э.). Это были довольно грубые оценки. Сравнительно точные результаты получили арабы в период расцвета арабского государства при халифе Аль-Мамуне (786 - 833 гг.). В Месопотамии на широте 35° длина дуги меридиана в 1° получилась равной 111,8 км (погрешность менее 1%), а радиус земного шара — 6406 км. Великий ученый Средней Азии Бируни (973-1048) для длины дуги окружности в 1° и ее радиуса получил соответственно 110,7 км и 6342 км (по современным данным для этих широт — 110,9 км и 6369 км). Бируни предложил новый метод определения радиуса Земли — путем измерения угла понижения горизонта с известной высоты над уровнем моря (рис. 3.1).

В эпоху великих географических открытий интерес к фигуре Земли возобновился. В 1528 г. французский ученый Жан Фернель (1497-1558) по измерениям между Парижем и Амьеном для дуги меридиана в 1° получил 110,6 км — погрешность менее 0,1%.

Точность градусных измерений заметно выросла, когда для определения длин дуг голландский ученый Снеллиус (1580-1626) разработал метод триангуляции. Значительный вклад в повышение точности измерений внес французский академик Жан Пикар (1620-1682). Он снабдил геодезические приборы зрительными трубами с сетками нитей. Повторив измерения между Парижем и Амьеном, он определил длину дуги меридиана в 1° с погрешностью менее 10 м; для радиуса Земли получил 6372 км.

В наши дни модель сферической Земли сохраняет свое практическое значение. Ее применяют в качестве промежуточной поверхности, на которую предварительно проектируют сфероид, а также при мелкомасштабном картографировании и во всех случаях, когда это оправдано соображениями точности.

Работы Ньютона положили начало новым представлениям о фигуре Земли. В геодезии временной интервал шарообразной Земли называют периодом "от Аристотеля до Ньютона".

Сфериодическая модель Земли. В 1666 г. И. Ньютон (1643-1727) открыл всемирный закон тяготения. Силы притяжения и центробежная сила формируют силу тяжести, действующую по направлению отвеса. В 1672 г. астроном Ж. Рише (1640-1696) обнаружил, что на широте 5° в Кайенне маятниковые часы шли медленнее, чем на широте 49° в Париже. Это означало, что ускорение силы тяжести вблизи экватора меньше, чем в севернее расположенному Париже. Объяснение этому явлению в 1686 г. дал Ньютон. Он представил в теле Земли два канала, заполненных водой. Один канал направил от центра масс Земли к полюсу, другой — к экватору. Давление в каждом из каналов в центре Земли должно быть одинаково. Но центробежная сила растет от полюсов к экватору и слегка уменьшает силу тяжести в экватори-

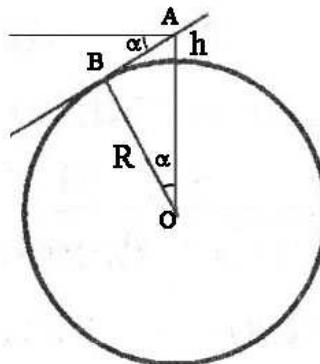


Рис. 3.1. Метод Бируни определения радиуса Земли; AB - касательная к земному шару линия визирования, h - высота наблюдения, α - угол понижения горизонта. Радиус Земли R следует из выражения:

$$R = (R + h) \cos \alpha.$$

альном канале, который поэтому должен быть несколько длиннее. По расчетам Ньютона он длиннее на 1/230 долю. Эта величина названа сжатием. Полярное сжатие (α) определяется отношением разности экваториального (a) и полярного (b) радиусов Земли к ее экваториальному радиусу.

Эллипсоид вращения Земля по форме близка к сфериоиду — фигуре, которую она приняла бы, находясь в состоянии гидростатического равновесия и под влиянием только сил взаимного тяготения ее частиц и центробежной силы вращения около неизменной оси. Простейшим из сфериоидов является *эллипсоид вращения с малым сжатием*.

Различают *общеземной эллипсоид*, наилучшим образом подходящий для решения глобальных задач, и *референц-эллипсоиды*, используемые отдельными странами в картографо-геодезических целях. В общем случае под *референц-эллипсоидом* понимают эллипсоид с определенными параметрами и определенным образом ориентированный в теле Земли. Как правило, в настоящее время все референц-эллипсоиды по качеству являются одновременно и общеземными эллипсоидами.

С начала XVIII в. усилия учёных были направлены на определение параметров эллипсоида вращения — радиуса экватора и полярного сжатия Земли. В течение некоторого времени идея эллипсоидальности Земли вызывала сомнение и требовала доказательств. Из-за сжатия длина дуги меридиана в 1° у полюсов Земли равна 111,7 км, а у экватора — 110,6 км. Эта разница может быть обнаружена измерениями. Измерения выполнили на севере и на юге Франции Кассини — отец (1625-1712) и сын (1677-1756). Однако, их результаты были недостаточно точны. Сжатие оказалось отрицательным, $-1/95$. Получалось, что Земля вытянута вдоль полярной оси, что противоречило выводам Ньютона. Спор разрешили предпринятые Академией наук Франции градусные измерения по меридиану в Перу (1735-1743) и в Лапландии (1736-1737). Размеры земного эллипсоида определялись неоднократно [5, 11]. Некоторые исторически важные результаты приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Эллипсоиды вращения прежних лет

Автор	Год	Большая полу-ось a (м)	Сжатие α
Деламбр	1800	6 375 653	1/334
Вальбек	1819	6 376 896	1/303
Бессель	1841	6 377 397,155	1/299,15
Кларк	1866	6 378 206,4	1/294,9786982
Кларк	1880	6 378 249,145	1/293,465
Эверест	1830	6 377 276,345	1/300,8017
Эйри	1830	6 377 563,396	1/299,3249646
Хейфорд	1909	6 378 388	1/297
Красовский	1940	6 378 245	1/298,3
Австралии	1965	6 378 160	1/298.25
GRS - 67	1967	6 378 160	1/298,247167247
WGS-60	1960	6 378 165	1/298,3
WGS-66	1967	6 378 145	1/298.25
WGS-72	1972	6 378 135	1/298,26

Отметим как исторически важные прошлых лет, так и современные эллипсоиды:

Деламбра — эллипсоид использован для определения по поручению Национального собрания Франции длины метра, которая приравнена одной сорокамиллионной части длины парижского меридиана.

Вальбека — применялся в России в XIX веке.

Бесселя — использовался во многих странах, в том числе в СССР до 1946 г.

Кларка 1866 г. - в странах Северной и Центральной Америки.

Кларка 1880 г. - в Азии, Африке и Центральной Америке.

Эвереста 1830 г. - в Индии и других странах этого региона.

Эйри 1830 г. – использовался в Великобритании.

Хейфорда - в 1924 г. на конгрессе в Мадриде был провозглашен в качестве международного, применялся в ряде стран Европы, Азии и Южной Америки; однако его размеры определены недостаточно точно.

Красовского - расчет эллипсоида выполнили в 1940 г. выдающийся ученый геодезист Ф.Н. Красовский (1878–1948) и его ученик А.А. Изотов (1907–1988). Постановлением СМ СССР от 7 апреля 1946 г. эллипсоид введен в систему отсчета 1942 г. СК-42. Постановлением правительства РФ с 1 июля 2002 г. использован в системе отсчета 1995 г. СК-95. Эллипсоид и упомянутые координатные системы еще будут применяться до 01.01.2017 г.

Австралийский – на его основе построены геодезические даты 1966 г. AGD-66 и даты 1984 г. AGD-84; позже, при введении геоцентрических дат Австралии 2000 г. GDA-2000, его сменил Австралийский национальный эллипсоид, основанный на параметрах WGS-84.

GRS-67 (*Geodetic Reference System*, 1967) - рекомендован международными геодезическими организациями в Люцерне в 1967 г.

GRS-80 - введен решением в Канберре в 1979 г. На его основе построены Международная общеземная система отсчета ITRS, Европейская система отсчета ETRS, а также современные геодезические координатные системы ряда стран Азии, Северной и Центральной Америки.

WGS-60 (*World Geodetic System*, 1960) - модель создана усилиями армии, авиации и флота США на базе астрономо-геодезических, гравиметрических и спутниковых измерений. Использовались многочисленные гравиметрические и астрономо-геодезические наблюдения. Эллипсоид предназначен для обеспечения работы глобальной системы позиционирования GPS.

WGS-66 – определён на основе новых геодезических, гравиметрических и спутниковых наблюдений, использован мировой геоид, представленный гармоническими коэффициентами до 24 порядка.

WGS-72 - использованы данные Мировой спутниковой триангуляционной сети и доплеровские измерения системой TRANSIT. Построен в форме эквипотенциального (уровненного) эллипсоида вращения выбором четырех параметров: большой полуоси (a), произведения массы Земли на гравитационную постоянную (GM), угловой скорости вращения Земли (ω) и нормированного второго зонального гармонического коэффициента геопотенциала ($C_{2,0}$).

WGS-84. Современный эллипсоид отсчетной системы. Ее улучшения производились неоднократно благодаря обширным GPS-измерениям. В 1994 г. усовершенствования геодезической основы пришлись на начало 730-ой GPS-недели. Она получила обозначение G-730. В 1996 г. с началом 873-ой GPS-недели создана новая усовершенствованная геодезическая основа G-873. Она стала очень близкой к ITRF-96. В 2002 г. произведено третье уточнение – G-1150. По среднему квадратическому критерию различия между координатами WGS-84 (G-1150) и ITRF-2000 составляют ~1 см. Практически отсчетные основы WGS-84 и ITRF стали идентичными.

IERS-96 (*International Earth Rotation Service*, 1996) - рекомендован Международной службой вращения Земли для обработки РСДБ-наблюдений внегалактических радиоисточников.

ПЗ-90 - Параметры Земли 1990 г. Общеземной эллипсоид и система отсчета. Система создана в России без интеграции с западными странами. Её координаты закреплены пунктами Космической геодезической сети КГС, построенной по фотографическим, доплеровским, дальномерным и альтиметрическим наблюдениям геодезических спутников ГЕОИК-1, ЭТАЛОН, ГЛОНАСС и др. Погрешность взаимного положения пунктов при расстояниях между ними до 10 000 км не более 30 см.

ПЗ-90.02 – уточненная система отсчета; постановлением правительства РФ с 2002 г. введена в качестве единой государственной системы в целях геодезического обеспечения орби-

тальных полетов КА и решения навигационных задач. В ней работала ГЛОНАСС. По распоряжению правительства России 2007 г. КА ГЛОНАСС были переведены на эту новую версию. Она довольно близка к системам *ITRF-2000* и *WGS-84*. Отличается от них лишь сдвигом начала координат примерно на 0,4 м.

ПЗ-90.11 – новый уточнённый вариант системы отсчёта “Параметры Земли 1990 г.” Постановлением правительства от 28 декабря 2012 г. вводится в качестве единой государственной системы координат в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач.

ГСК-2011 – эллипсоид и геодезическая система координат 2011 года для осуществления геодезических и картографических работ. Прежние системы геодезических координат СК-95 и СК-42 применяются до 1 января 2017 г.

В настоящее время для картографо-геодезических работ наибольшее значение имеют общеземные эллипсоиды *GRS-80*, *WGS-84*, *IERS-96*, *ПЗ-90.11* и *ГСК-2011*. Их параметры указаны в таблицах 3.2 и 3.3.

Трехосный эллипсоид. Более точно фигуру Земли представляет трехосный эллипсоид. Его размеры вычисляли геодезисты Ф.Ф. Шуберт (1789-1865), дважды А.Р. Кларк (1828-1914) и другие. По данным Ф.Ф. Шуберта наибольшая ось эллипсоида находится в меридиане $41^{\circ} 04'$ восточной долготы, а экваториальное сжатие равно 1/8886; у А.Р. Кларка в первый раз — в меридиане $15^{\circ}34'$ восточной долготы при сжатии 1/3281, а во второй раз — в меридиане $8^{\circ}15'$ западной долготы при сжатии 1/13731. На 1991 г. трехосный эллипсоид Земли имел параметры: полярный радиус $b = 6\ 356\ 749,4$ м; экваториальные радиусы наибольший $a_{\max} = 6\ 378\ 161,6$ м, наименьший $a_{\min} = 6\ 378\ 112,4$ м; полярные сжатия $\alpha_{\max} = 1/297,875$, $\alpha_{\min} = 1/298,560$; экваториальное сжатие $\alpha_e = 1/128\ 500$; долгота наибольшего меридиана - $14,9^{\circ}$. При обработке геодезических измерений и составлении топографических карт трехосным эллипсоидом не пользуются вследствие слабо выраженной у Земли трехосности и чрезвычайного усложнения расчетных формул.

Параметры эллипсоида вращения. Размеры и форму Земного эллипсоида вращения характеризуют два параметра: большая экваториальная полуось a и сжатие α . Чаще всего эти параметры и указываются. Кроме них в расчетах используются производные параметры, такие как малая полярная полуось b , полярный радиус c , первый e и второй e' эксцентриситеты меридионального эллипса и др. Первый эксцентриситет определяется отношением линейного эксцентриситета, отрезка от центра эллипса до каждого из его фокусов

$$\sqrt{a^2 - b^2},$$

к полуоси a , второй - отношением этого же отрезка к полуоси b . Значения параметров важнейших общеземных эллипсоидов даны в табл. 3.2. В табл. 3.3 приведены значения параметров для эллипсоидов *IERS-96*, *ГСК-2011* и референц-эллипсоида Красовского.

Таблица 3.2

Параметры современных общеземных эллипсоидов

	<i>GRS-80</i>	<i>WGS-84</i>	<i>ПЗ-90.11</i>
a	6378 137	6 378 137	6 378 136
b	6 356 752,3141	6 356 752,314	6 356 751,362
c	6 399 593,6259	6 399 593,626	6 399 592,578
α	1/298,257 222 101	1/298,257223563	1/298,25784
e^2	0,00669438002290	0,006694379990	0,006694366177
e'^2	0,00673949677548	0,006739496742	0,006739482743

Таблица 3.3

Параметры современных земных эллипсоидов

	IERS	ГСК-2011	Красовского
a	6 378 136,49	6 378 136,5	6 378 245
b	6 356 751,7505	6 356 751,7580	6 356 863,019
c	6 399 593,1699	6 399 593,1824	6 399 698,902
α	1/298,25645	1/298,2564151	1/298,3
e^2	0,006694397324	0,006694398106	0,006693421623
e'^2	0,006739514310	0,006739515103	0,006738525415

Ниже дана группа формул взаимосвязей применяемых параметров:

$$\begin{aligned}\alpha &= (a - b) / a; \alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \\ b &= a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = a / \sqrt{1 + e^2} = c(1 - e^2); \\ c &= \frac{a}{1 - \alpha}; c = a^2 / b; c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}; c = \frac{a(1 + n)}{1 - n}; \\ e^2 &= \alpha(2 - \alpha); e^2 = (a^2 - b^2) / a^2; e^2 = e'^2 / (1 + e'^2); \\ e'^2 &= \frac{1}{(1 - \alpha)^2} - 1; e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2; e'^2 = e^2 / (1 - e^2); \\ \frac{b}{a} &= \sqrt{1 - e^2}; \frac{a}{b} = \sqrt{1 + e'^2}; n = \frac{a - b}{a + b}; m = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Значения большой полуоси и сжатия для разных эллипсоидов табл. 3.2 и 3.3 даны с разной точностью. Вследствие этого другие параметры получены также с разной точностью. Можно оценить, как точно следует вычислять эти параметры. Будем полагать, что большая экваториальная полуось a и сжатие α являются основными исходными параметрами. По ним вычисляются все остальные. Эти числа приближенные. Полагаем, что их ошибки не превышают 0,5 единицы последнего знака. В таком случае значения полуоси b и полярного радиуса c приведены с избыточной точностью, ибо для их погрешностей имеем:

$$\Delta a \approx \Delta b \approx \Delta c.$$

Для погрешностей эксцентриситетов получаем

$$\Delta e^2 \approx \Delta e'^2 \approx 2\Delta\alpha.$$

Для предельной погрешности сжатия эллипсоида GRS-80 получим $\Delta\alpha \approx 5 \times 10^{-15}$, для эллипсоида ГСК-2011 -

$\Delta\alpha \approx 5 \times 10^{-13}$. Поэтому значения эксцентриситетов для GRS-80 округлены до 14-го знака после запятой, а для ГСК-2011 - до 12-го знака после запятой. С той же точностью эти значения указаны и для других эллипсоидов табл. 3.2 и 3.3.

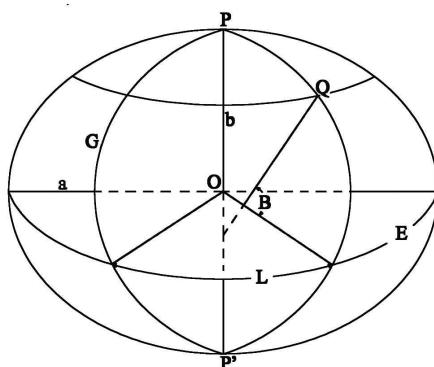


Рис. 3.2. Геодезические координаты точки эллипсоида $Q(B, L)$

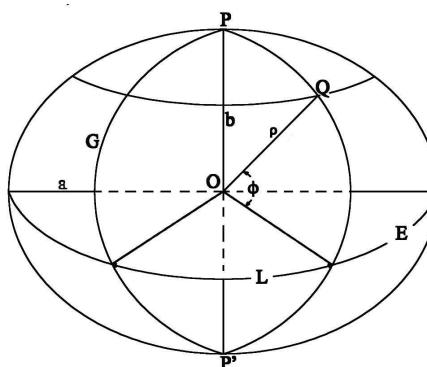


Рис. 3.3. Геоцентрические координаты точки эллипсоида $Q(\Phi, L)$

Эллипсоидальные координаты. Основными координатами являются геодезическая долгота L , геодезическая широта B , геоцентрическая широта Φ и так называемая приведенная широта U (рис. 3.2-3.4).

Приведенная широта (U) определяется следующим образом (рис. 3.3 и 3.4). Соединим точку Q на эллипсоиде с точкой на его оси вращения l так, чтобы длина отрезка между этими точками равнялась большой полуоси a . Острый угол, образуемый данным отрезком с плоскостью экватора, называется приведенной широтой. Отрезок пересекает плоскость экватора в точке k . Отрезок Qk равен малой полуоси b эллипсоида вращения. На рис. 3.4 даны меридиональные сечения эллипсоида вращения с координатными осями — вертикальной z и горизонтальной r . В этих координатах приведенная широта U позволяет записать уравнение меридионального эллипса в *параметрической* форме:

$$r = a \cos U; z = b \sin U. \quad (3.1)$$

Отсюда следует уравнение меридионального эллипса:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 U + \sin^2 U = 1.$$

Приведённую широту ввёл французский математик, работавший и в области геодезии, Лежандр (*Adrien Marie Legendre*, 1752-1833).

Для указанных выше широт рис. 3.4 имеем:

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \Phi; \frac{z}{r} = \left(\frac{b}{a} \right) \operatorname{tg} U; \frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} (90 + B).$$

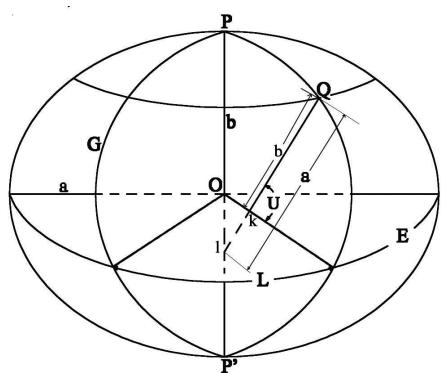
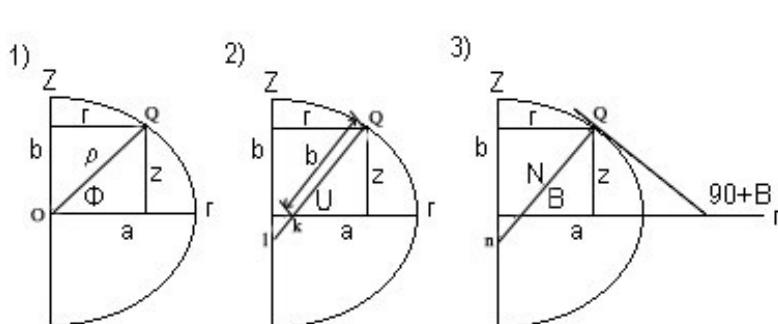


Рис. 3.3. Приведённые координаты точки эллипсоида $Q(U, L)$

Первая формула следует из рис. 3.4.1. Вторая получена из уравнений (3.1). Третья запись есть уравнение касательной к меридиональному эллипсу, составляющей угол с горизонтальной осью ($90^\circ + B$). После её дифференцирования получаем:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dU} \frac{dU}{dr} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} U = -\operatorname{ctg} B; \quad \operatorname{tg} B = \frac{a}{b} \operatorname{tg} U.$$

Отсюда для точек на эллипсоиде следуют формулы взаимосвязи широт B , U и Φ :



$$\operatorname{tg} \Phi = \sqrt{(1 - e^2)} \operatorname{tg} U, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{(1 + e^2)} \operatorname{tg} \Phi, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} B = \sqrt{(1 + e^2)} \operatorname{tg} U, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{(1 - e^2)} \operatorname{tg} B, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (1 - e^2) \operatorname{tg} B, \quad (3.6)$$

$$\operatorname{tg} B = (1 + e^2) \operatorname{tg} \Phi. \quad (3.7)$$

Рис. 3.4. Эллипсоидальные широты в меридиональном сечении r :
1) геоцентрическая Φ , 2) приведённая U , 3) геодезическая B

Полярные координаты на эллипсоиде вращения. Как уже отмечалось в Лекции 1, ими являются геодезический азимут и геодезическая линия. Геодезическая линия — это линия кратчайшего расстояния между двумя пунктами на любой поверхности. На сфере ей соответ-

ствует *ортодромия*, на плоскости — *прямая*. Название *геодезическая линия* принято не только в геодезии, но и в математике.

Клеро (*Alexis Claude Clairaut*, 1713-1765, французский, математик, астроном, геодезист) в 1733 г. доказал, что на поверхности вращения в каждой точке геодезической линии произведение радиуса параллели r на синус азимута A линии величина постоянная:

$$r \sin A = a \sin A_0 = \text{const.}$$

Константа равна произведению большой полуоси эллипсоида (a) на синус азимута (A_0) линии в точке на экваторе. Линия совпадает с меридианом, когда азимут $A_0 = 0$. Из всех геодезических линий только меридианы проходят через полюса. Когда $A_0 = 90^\circ$, геодезическая линия совпадает с экватором. В иных случаях по мере ухода к северу геодезическая линия постепенно уклоняется от меридиана, так как радиус параллели уменьшается и, следовательно, её азимут должен увеличиваться. Ход геодезической линии показан на рис. 3.5. После пересечения экватора в точке Q_1 геодезическая линия достигает точки Q_2 на параллели, где будет $\sin A = 1$. Начиная с этой параллели, геодезическая линия повернет к югу. В точке Q_3 пересечёт экватор. В точке Q_4 коснется параллели, после чего повернёт на север. Таким образом, геодезическая линия будет описывать витки, последовательно касаясь то на севере, то на юге параллелей, где $\sin A = 1$. Геодезическая линия, как пространственная кривая, обладает кручением. Поэтому после каждого витка она смещается по долготе, опутывая эллипсоид бесконечным числом витков. В навигации используется также линия постоянного азимута — *локсодромия*.

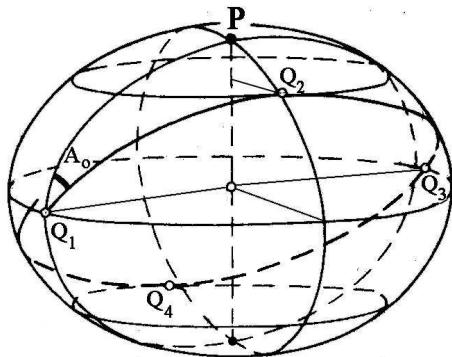


Рис.3.5. Виток геодезической линии

Нормальные и наклонные сечения. Плоскости, проходящие через нормаль к поверхности эллипсоида, называют нормальными. Нормальная плоскость пересекает поверхность эллипсоида по плоской кривой, называемой *нормальным сечением*.

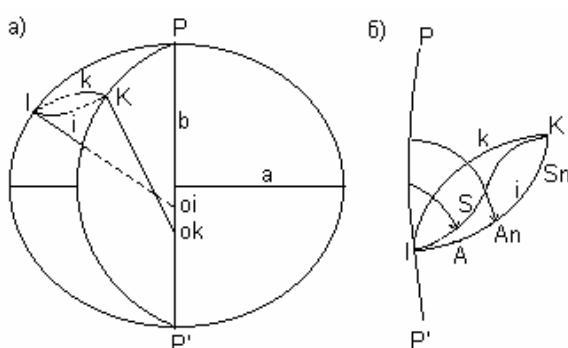


Рис. 3.6. Взаимные нормальные сечения и геодезическая линия

Построение нормального сечения можно представить следующим образом. В точке I устанавливается теодолит. Его вертикальная ось совмещается с нормалью к эллипсоиду. При этом уровень на горизонтальном круге теодолита будет почти в нуль пункте, так как отвесные линии в среднем уклоняются от нормали лишь на $1-3''$. Труба теодолита наводится на точку K . Нормальной будет плоскость, проведенная через вертикальную и визирные оси теодолита.

Нормали, проведенные к эллипсоиду через точки, не лежащие на одном меридиане или на экваторе, взаимно не пересекаются, но при этом

все они пересекают малую ось эллипсоида вращения. Поэтому нормальное сечение, например, lIk , проведенное с некоторой точки I на другую точку K , не совпадает с нормальным сечением KkI , проведенным в обратном направлении — с точки K на точку I (рис. 3.6). *Прямое и обратное* нормальные сечения называют *взаимными*. Сфериодический треугольник — разорванная фигура. На рис. 3.7 закрашены углы, измеряемые теодолитом между прямыми сече-

ниями. В треугольниках разрывы устраняют, заменяя взаимные сечения геодезическими линиями.

В текущей точке I (рис. 3.6 б) разность азимутов геодезической линии A и прямого нормального сечения A_n и разность длин геодезической S и нормального сечения S_n , если длины линий малы по сравнению с радиусами кривизны эллипсоида, определяются формулами:

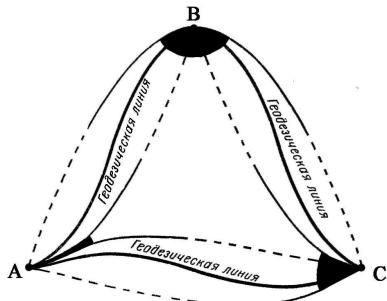


Рис.3.7. Разрывы сфероидического треугольника устраняют, соединяя его вершины геодезическими линиями

$$(A_n - A)'' = \frac{e^2 \rho''}{12a^2} S^2 \cos^2 B_1 \sin 2A,$$

$$(S_n - S) = \frac{e^4 S^5}{360a^4} \cos^4 B_1 \sin^2 2A.$$

Геодезическая линия лежит ближе к прямому нормальному сечению, деля угол между нормальными сечениями в отношении 1 к 2. В худшем случае, когда широта $B_1 = 0$, азимут линии $A = 45^\circ$ и ее длина $S = 1000$ км, разность азимутов нормального сечения и геодезической линии менее $3''$, а разность их длин — менее 0,1 мм. Длину нормального сечения можно принять равной длине геодезической линии. Расхождения азимутов в высокоточных работах учитывают даже при линиях длиной в 30 км.

Существуют два нормальных сечения, имеющие наибольший и наименьший радиусы кривизны. Их называют *главными нормальными сечениями*, а их радиусы — *главными радиусами кривизны*. Одним из главных нормальных сечений является меридиан. Меридианы плоскости проходят через полярную ось. Вторым главным будет нормальное сечение, перпендикулярное к меридиану. Его называют *сечением первого вертикала*. К этому сечению относится также и экватор.

Сечения, образуемые плоскостями, не проходящими через нормали, называют *наклонными*. Все параллели образуются наклонными сечениями и являются окружностями. Их плоскости перпендикулярны оси вращения, а с плоскостью первого вертикала составляют углы, равные геодезической широте B .

Радиусы кривизны эллипсоида вращения. Рассмотрим следующие радиусы: радиус параллели r , радиус кривизны меридиана M , радиус кривизны первого вертикала N , радиус кривизны произвольного нормального сечения R_A , средний радиус кривизны R , радиус-вектор эллипсоида вращения ρ , а также радиус всего земного шара R_\oplus .

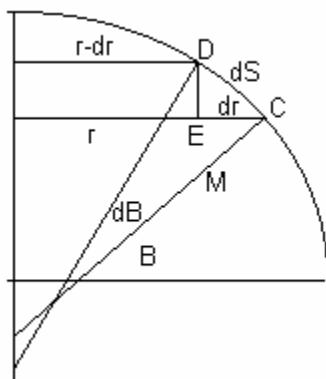


Рис. 3.8. Определение радиуса кривизны меридиана

Радиус параллели. Воспользуемся для радиуса параллели r формулой (3.1). Выразив в ней $\cos U$ через $\operatorname{tg} U$, а последний через $\operatorname{tg} B$, получим радиус параллели в функции геодезической широты B :

$$r = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (3.8)$$

Радиус кривизны меридиана. Для бесконечно малой дуги меридиана радиуса M , соответствующей изменению широты на величину dB , имеем (рис. 3.8):

$$dS = M dB.$$

В треугольнике CDE угол при вершине C равен $(90^\circ - B)$. С ростом широты B радиус параллели r убывает. Поэтому имеем:

$$-dr = dS \sin B;$$

$$dr = -M \sin B dB.$$

Отсюда следует

$$\frac{dr}{dB} = -M \sin B. \quad (3.9)$$

Дифференцируя радиус r (3.8) по широте B , получаем:

$$\frac{dr}{dB} = a [-\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-1/2} + e^2 \sin B \cos^2 B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2}].$$

Отсюда следует

$$\frac{dr}{dB} = -a (1 - e^2) \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = -M \sin B.$$

Окончательно для радиуса кривизны меридиана получаем:

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}} = \frac{c}{(1 + e^2 \cos^2 B)^{3/2}}. \quad (3.10)$$

Вторая формула для M получена после преобразований первой с учётом взаимосвязей между параметрами эллипсоида вращения a, c, e^2, e'^2 .

В геодезии используют так называемые *основные сфероидические функции*:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad V = \sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}.$$

С учётом этих функций радиус кривизны меридиана принимает вид:

$$M = \frac{a (1 - e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}.$$

Легко заметить, что радиус M у полюса больше, чем на экваторе. Иначе, кривизна меридиана убывает от экватора к полюсам. Радиус меридионального сечения получает наибольшие изменения на широте $B = 45^\circ$; на этой широте изменение $dB = 1^\circ$ вызывает изменение радиуса $dM \approx 1$ км.

Радиус кривизны меридиана M нужен для вычисления длин дуг меридианов и нахождения широт по ним.

Радиус кривизны первого вертикала. Обозначим радиус кривизны первого вертикала через N . Параллель и сечение первого вертикала имеют общую касательную в точке на меридиане, кроме того, угол между нормальной плоскостью первого вертикала и наклонной плоскостью параллели равен геодезической широте B . По теореме Менье (Jean-Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place, 1754-1793, французский математик), если нормальное и наклонное сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих сечений:

$$r = N \cos B. \quad (3.11)$$

Заменив r выражением (3.8), получим:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{c}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}}. \quad (3.12)$$

Вторая формула для N получена после преобразований первой с учётом взаимосвязей между параметрами эллипсоида вращения a, c, e^2, e'^2 . Используя обозначения основных сфероидических функций, получаем:

$$N = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}.$$

На всех точках эллипсоида, кроме полюсов, $N > M$. Из всех радиусов нормальных сечений наибольшим является N , а наименьшим — M . На полюсах радиусы $M = N = c$. В связи с этим параметр c называют *полярным радиусом кривизны*.

Радиус кривизны N используют для вычислений радиусов параллелей, разностей долгот и в других задачах.

Радиус кривизны произвольного нормального сечения. Радиус кривизны R_A нормального сечения, проведенного под азимутом A , находят по формуле Эйлера (Leonhard Euler, 1707-1783, швейцарский, немецкий, российский математик, физик, астроном):

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (3.13)$$

Замечаем, что при азимутах $A = 0$ и $A = 180^\circ$ радиус $R_A = M$, а при азимутах $A = 90^\circ$ и $A = 270^\circ$ радиус $R_A = N$.

Средний радиус кривизны. Средним радиусом кривизны в данной точке эллипсоида называют предел, к которому стремится среднее арифметическое из радиусов кривизны всех возможных нормальных сечений в этой точке. Если через точку на эллипсоиде проведены нормальные сечения, азимуты A которых отличаются на бесконечно малые величины dA , то средний радиус R , учитывая симметрию нормальных сечений по квадрантам, будет:

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} R_A dA.$$

С учетом формулы (3.13) после интегрирования получают:

$$R = \sqrt{MN}. \quad (3.14)$$

Средний радиус кривизны равен среднему геометрическому из значений главных радиусов кривизны.

Радиус R употребляют в задачах, связанных с развертыванием поверхности эллипсоида на поверхность сферы.

Радиус-вектор эллипсоида. Обозначим радиус-вектор буквой ρ . Он соединяет центр эллипсоида с точкой на его поверхности. Для радиуса параллели r имеем:

$$r = \rho \cos \Phi = N \cos B.$$

Выражая $\cos \Phi$ через $\cos B$, получаем:

$$\rho = N \cos B \sqrt{1 + \tan^2 \Phi}.$$

Заменяя $\tan \Phi$ через $\cos B$, для радиус-вектора находим:

$$\rho = N \sqrt{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 B}. \quad (3.15)$$

В данном выражении радиус-вектор является функцией геодезической широты B . Представим его в функции геоцентрической широты. Для радиуса параллели r имеем:

$$r = \rho \cos \Phi = a \cos U.$$

Выразив $\cos U$ через $\cos B$, а тот через $\cos \Phi$, получим формулу радиус-вектора в функции геоцентрической широты Φ :

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.16)$$

Радиус-вектор применяют в вычислениях потенциалов силы тяжести на поверхности уровня эллипсоида, высот геоида, квазигеоида и в других задачах.

Радиусы эллипсоида зависят от широты. В табл. 3.4 приведены их значения на разных широтах и показан диапазон их изменения Δ_{\max} в километрах и в процентах. Наибольшие изменения претерпевает радиус меридиана (1%), наименьшие – радиус-вектор и радиус кривизны первого вертикала (1/3 %).

Длины дуг меридианов, параллелей, площади сфероидических трапеций. Линии меридианов и параллелей на шаре и на эллипсоиде формируют координатную *географическую сетку*. Изображение географической сетки в плоскости карты создает координатную *картоографическую сетку*. Длины дуг меридианов, параллелей и ограниченные этими линиями площади сфероидических трапеций, а также площади треугольников, являются важными величинами для построения и использования географических карт.

Таблица 3.4

Радиусы земного эллипсоида на разных широтах

Широта B°	M , км	N , км	R , км	ρ , км
0	6 336	6 378	6 357	6 378
30	6 351	6 384	6 368	6 373
60	6 384	6 394	6 389	6 362
90	6 400	6 400	6 400	6 357
Δ_{\max} , км	64	22	43	21
Δ_{\max} , %	1	1/3	2/3	1/3

Вычисление длины дуги параллели. Длина дуги S_n (м) параллели радиуса r , расположенной между двумя меридианами с долготами L_1, L_2 , выраженнымими в радианах, вычисляется по формуле:

$$S_n = r(L_2 - L_1).$$

Вычисление длины дуги меридиана. Длина дуги меридиана X (м) протяженностью от экватора до некоторой параллели широты B , выраженной в радианах, вычисляется по формуле:

$$X = \int_0^B M dB = a(1 - e^2) \int_0^B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-3/2} dB. \quad (3.17)$$

Элементарная дуга меридиана dX рассматривается как бесконечно малая дуга окружности радиуса M . Ее длина $dX = M dB$. Дугу меридиана получают интегрированием элементарных дуг от экватора до параллели широты B . Этот интеграл не выражается в элементарных функциях, и его решают *численно* или *разложением в ряд*.

Численные определения длин дуг меридианов. Дуга меридиана расположена между параллелями геодезических широт B_1 и B_2 . Вычисляют среднюю широту $B_m = (B_1 + B_2)/2$. По этой широте определяют радиус кривизны меридиана M_m , а затем вычисляют длину дуги меридиана по формуле (B - в радианах):

$$S_m = M_m (B_2 - B_1). \quad (3.18)$$

Иными словами, дуга эллипса заменена дугой окружности радиуса M_m . Погрешность формулы составляет:

менее 1 мм для дуг длиной до 45 км,

около 3 см при их длине в 100 км,

около 30 м при длине в 1000 км.

Чем линия длиннее, тем больше её ошибка вычислений.

Однако, при этом надо учитывать и графическую точность масштаба карты, принимаемую в картографии равной 0,1 мм. Эта точность вполне достаточна, например, для расчётов длин боковых рамок топографических карт всего масштабного ряда (табл. 3.5). Так, в масштабе

1:100 000 при графической точности 10 м ошибка будет около 1 мм. При более крупных масштабах эта ошибка станет еще меньше. В масштабе 1:1 000 000 графическая точность допускает ошибку в 100 м. Между тем расстояния длин боковых рамок будут вычислены с ошибкой лишь 30 м.

Расчётную формулу легко уточнить небольшим её усложнением, вычисляя интеграл (3.17) методом парабол Симпсона. Эллипс заменен дугой параболы. Формула принимает вид:

$$S_m = (M_1 + 4M_m + M_2) \frac{(B_2 - B_1)}{6}. \quad (3.19)$$

По этой формуле длины дуг меридианов до 500 км вычисляют с погрешностями в 1-2 см.

Таблица 3.5

Погрешности вычислений боковых рамок листов топографических карт

Масштаб	Длина рамки S_m , км	Графическая точность, м	Погрешности в S_m
1:100 000	37	10	< 1 мм
1:200 000	74	20	< 3 см
1:500 000	220	50	< 1 м
1:1 000 000	445	100	< 30 м

Строгое вычисление длины дуги меридиана. С этой целью в (3.17) подынтегральную функцию разложим в ряд Маклорена (*Colin Maclaurin*, 1698-1746, английский математик):

$$(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \dots$$

$$(1-e^2 \sin^2 B)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 B + \frac{35}{16}e^6 \sin^6 B + \dots$$

Синусы четных степеней заменим косинусами кратных дуг:

$$\sin^2 B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B; \sin^4 B = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B;$$

$$\sin^6 B = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B.$$

После этих преобразований и интегрирования получают:

$$X = C_0 B - C_2 \sin 2B + C_4 \sin 4B - C_6 \sin 6B + \dots \quad (3.20)$$

где B - широта в радианах, дуга X в метрах.

Для коэффициентов (табл. 3.6) имеем (м):

$$C_0 = a(1-e^2) \left(1 + \frac{3e^2}{4} + \frac{45e^4}{64} + \frac{175e^6}{256} + \dots \right);$$

$$C_2 = a(1-e^2) \left(\frac{3e^2}{8} + \frac{15e^4}{32} + \frac{525e^6}{1024} + \dots \right);$$

$$C_4 = a(1-e^2) \left(\frac{15e^4}{256} + \frac{105e^6}{1024} + \dots \right);$$

$$C_6 = a(1 - e^2) \left(\frac{35e^6}{3072} + \dots \right).$$

Эти коэффициенты также могут вычисляться по формулам:

$$C_0 = s_0 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{8}s_4 + \frac{5}{16}s_6 + \frac{35}{128}s_8 + \dots;$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left(s_2 + s_4 + \frac{15}{16}s_6 + \frac{7}{8}s_8 + \dots \right);$$

$$C_4 = \frac{1}{32} \left(s_4 + \frac{3}{2}s_6 + \frac{7}{4}s_8 + \dots \right);$$

$$C_6 = \frac{1}{96} \left(\frac{1}{2}s_6 + s_8 + \dots \right);$$

$$s_0 = a(1 - e^2); \quad s_2 = \frac{3}{2}e^2s_0;$$

$$s_4 = \frac{5}{4}e^2s_2; \quad s_6 = \frac{7}{6}e^2s_4;$$

$$s_8 = \frac{9}{8}e^2s_6.$$

Длина дуги S_m меридиана между двумя параллелями с широтами B_1 и B_2 равна

$$S_m = X_2 - X_1.$$

Точность формул характеризуется ошибками, меньшими десятых долей миллиметра.

Таблица 3.6

Значения коэффициентов для вычислений длин дуг меридианов (м)

Коэффициенты	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
C_0	6 367 449,1458	6 367 448,1695	6 367 448,6176	6 367 558,4968
C_2	16 038,5086	16 038,4730	16 038,5508	16 036,4802
C_4	16,8326	16,8325	16,8327	16,8281
C_6	0,0220	0,0220	0,0220	0,0220

Вычисление геодезической широты B по длине дуги меридиана X . Обратная задача, вычисления широт по длинам дуг меридианов, решается по формулам, полученным обращением тригонометрических рядов в (3.20). Имеем в радианах:

$$B = \beta + D_2 \sin 2\beta + D_4 \sin 4\beta + D_6 \sin 6\beta + \dots; \quad (3.21)$$

$$\beta = \frac{X}{C_0};$$

$$D_2 = \frac{C_2}{C_0} \left(1 + \frac{C_4}{C_0} - \frac{C_2^2}{2C_0^2} \right);$$

$$D_4 = \frac{C_2^2}{C_0^2} - \frac{C_4}{C_0};$$

$$D_6 = \frac{C_6}{C_0} - \frac{3C_2}{C_0} \left(\frac{C_4}{C_0} - \frac{C_2^2}{2C_0^2} \right).$$

Широта B получается в радианах. Значения коэффициентов даны в табл. 3.7 (числовые значения, взятые из таблицы, умножаются на 10^{-10}).

Таблица 3.7

Значения коэффициентов для вычислений широт по длинам дуг меридианов

Коэф-фици-енты	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$
D_2	25 188 265,8	25 188 213,6	25 188 334,2	25 184 647,7
D_4	37 009,6	37 009,4	37 009,8	36 998,9
D_6	74,5	74,5	74,5	74,4

В формулах (3.20) и (3.21) иногда предпочитают заменить функции кратного аргумента степенными функциями:

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x; \\ \sin 4x &= 2 \sin x \cos x (2 - 4 \sin^2 x); \\ \sin 6x &= 2 \sin x \cos x (3 - 16 \sin^2 x + 16 \sin^4 x). \end{aligned}$$

Для вычисления, например, длины дуги меридиана, получаем (м):

$$X = C_0 B - \sin B \cos B [(2C_2 - 4C_4 + 6C_6) + (8C_4 - 32C_6) \sin^2 B + (32C_6) \sin^4 B].$$

Полезно помнить следующие соотношения между соответственными величинами широт и длин дуг меридиана: $0,0001'' \Leftrightarrow 3 \text{ мм}$, $0,001'' \Leftrightarrow 3 \text{ см}$, $1'' \Leftrightarrow 31 \text{ м}$, $1' \Leftrightarrow 1,85 \text{ км}$ и $1^0 \Leftrightarrow 111 \text{ км}$.

Вычисление площади сфероидической трапеции. Сфероидическая трапеция поверхности эллипсоида ограничена меридианами и параллелями (рис. 3.9). Бесконечно малая площадка сфероидической трапеции dP равна произведению бесконечно малых дуг меридиана и параллели, равных соответственно $dX = M dB$ и $dY = r dL$:

$$dP = r M dB dL = R^2 \cos B dB dL.$$

Отсюда, подставляя выражение среднего радиуса R , для площади P трапеции, ограниченной параллелями с широтами B_1 и B_2 и меридианами L_1 и L_2 , получают:

$$P = b^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_{B_1}^{B_2} \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} dB dL.$$

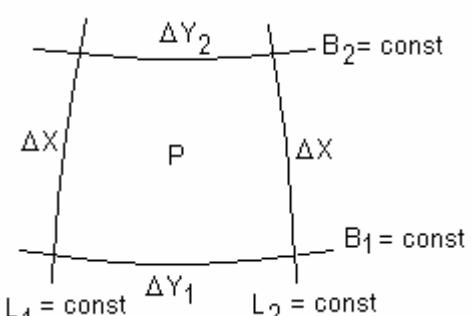


Рис. 3.9. Сфероидическая трапеция

Площадь P сфероидической трапеции, ограниченной параллелями с широтами B_1 и B_2 и меридианами с долготами L_1 и L_2 , равна:

$$P = (L_2 - L_1)(F_2 - F_1).$$

При этом

$$F = b^2 \int_0^B \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} dB.$$

Геометрически величина F представляет площадь поверхности эллипсоида вращения, ограниченную экватором, параллелью широты B и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан. Она участвует в расчетных формулах равновеликих картографических проекций. Её можно вычислить двумя путями. Вычислим разложением в ряд функции под интегралом, воспользовавшись формулой:

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

$$\cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-2} = \cos B + 2e^2 \cos B \sin^2 B + 3e^4 \cos B \sin^4 B + \dots$$

При этом учитывается следующее правило интегрирования:

$$\int \cos B \sin^n B dB = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} B, \text{ при } n \neq -1.$$

Получаем:

$$F = b^2 \left(\sin B + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 B + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 B + \frac{4}{7} e^6 \sin^7 B + \dots \right). \quad (3.22)$$

Если в формуле малую полуось b представить в километрах, то площадь F будет получена в километрах квадратных (км^2).

Вычислим площадь P_e всей поверхности эллипсоида. Для этого примем $(L_2 - L_1) = 2\pi$, $B_1 = 0$, $B_2 = \pi/2$, полученный результат удвоим. Тогда

$$P_e = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \dots \right).$$

Для интегрирования в замкнутом виде необходимо воспользоваться подстановкой $e \sin B = \sin X$. Отсюда следует $e \cos B dB = \cos X dX$. В результате получают:

$$F = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right). \quad (3.23)$$

Если в формулах малую полуось b взять в километрах, то площадь получим в км^2 . Выражая полуось b через большую полуось a , для всей площади эллипсоида получим:

$$P_e = 2a^2 \pi \left[1 + \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) \right].$$

Площади поверхностей основных эллипсоидов в квадратных километрах указаны ниже:

Эллипсоид	WGS-84	ПЗ-90.11	ГСК-2011	Красовского
Площадь	510 065 622	510 065 464	510 065 539	510 083 059

Приведенные формулы, в частности, находят применение в картометрических работах и построениях равновеликих картографических проекций.

Вычисление площади сферического и сфероидического треугольника. Такие решения имеют место при картометрии на эллипсоиде. Сторонами треугольников являются линии кратчайших расстояний. Площадь F' сферического треугольника определяется произведением квадрата радиуса сферы R на сферический избыток ϵ (отклонение суммы углов треугольника от значения π):

$$F' = \epsilon R^2.$$

Для вычисления сферического избытка удобна формула:

$$\operatorname{tg} \frac{\epsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{s-\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{s-\gamma}{2}},$$

где α, β, γ – стороны треугольника, выраженные в долях радиуса, $s = (\alpha+\beta+\gamma)/2$. Если в качестве R выбран средний радиус кривизны (3.14), то в пределах широтного пояса сфероидические треугольники могут решаться как сферические с точностью, указанной ниже в табл. 3.9. Существуют и другие способы решения сфероидических треугольников^{*}

Радиус всего земного шара. Этот радиус можно выбрать, исходя из различных соображений. Определим радиусы шара несколькими способами: R_{ab} — равный среднему из полуосей эллипсоида; $R_{пл}$ — одинаковой с эллипсоидом площадью P поверхности; $R_{об}$ — одинакового объема; R_{\oplus} — средний из перечисленных выше. Для них имеем:

$$R_{ab} = \frac{a+a+b}{3}; R_{пл} = \sqrt{\frac{P}{4\pi}}; R_{об} = \sqrt[3]{a^2b},$$

$$R_{\oplus} = \frac{R_{ab} + R_{пл} + R_{об}}{3}.$$

Данные формулы после разложения в ряд принимают вид:

$$R_{ab} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{15}{360}e^4 - \frac{189}{9072}e^6 - \dots),$$

$$R_{пл} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{201}{9072}e^6 - \dots),$$

$$R_{об} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{25}{360}e^4 - \frac{385}{9072}e^6 - \dots).$$

$$R_{\oplus} = a(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{19}{360}e^4 - \frac{258}{9072}e^6 - \dots).$$

Значения этих радиусов для эллипсоидов *GRS-80* и Красовского даны в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Радиусы всего земного шара

Радиусы, м	GRS-80	Красовского
R_{ab}	6 371 008.7714	6 371 117.673
$R_{пл}$	6 371 007.1810	6 371 116.083
$R_{об}$	6 371 000.7900	6 371 109.694
R_{\oplus}	6 371 005.5808	6 371 114.483
X	10 001 965.7293	10 002 137.498
X_{\oplus}	10 007 552.1600	10 007 723.230
$\Delta_{X=X_{\oplus}-X}$	5586.43	5585.732
$\Delta_{X/X}$	1/1790	1/1791
S	10 018 754,17	10 018 923,82
S_{\oplus}	10 007 552,16	10 007 723,23
$\Delta_{S=S_{\oplus}-S}$	11 202.01	11 200.79
$\Delta S/S$	1/894	1/894

В табл. 3.8 приведены вычисленная строгим способом дуга X меридиана от экватора до полюса и её значение X_{\oplus} , определённое по радиусу R_{\oplus} . Получено их различие в абсолютной и относительной мерах. Такие же вычисления выполнены и для четверти длины экватора.

Расчёты показывают, что в качестве среднего радиуса земного шара можно принять значение $R_{\oplus} = 6 371$ км. Оно подходит для всех общеземных эллипсоидов, а также и для эллипсоида Красовского. Шар такого радиуса по своим размерам, площади поверхности и объему

* Серапинас Б. Б. О вычислении площадей сфероидических треугольников. Геодезия и картография. 2012. № 9. С. 2-6.

очень близок к земному эллипсоиду. Однако длина дуги меридиана между экватором и полюсом на шаре будет на 5,6 км длиннее, чем на эллипсоиде, а четверть длины экватора будет на 11,2 км короче, чем эллипсоиде. В относительной мере эти искажения составляют соответственно около 1/1800 и 1/900.

Возможны и другие размеры радиуса шара [6, с. 59]. Так, если взять радиус шара равным большой полуоси эллипсоида, то экватор изобразится без изменений, но в длине меридиана между полюсом и экватором погрешность составит 16,8 км. Если же в качестве радиуса шара принять малую полуось эллипсоида, то погрешность по меридиану будет 16,8 км, а по экватору — 33,6 км. Чтобы разница на эллипсоиде и на шаре в длинах дуг четверти меридиана и четверти экватора была одинаковой, равной 8,4 км, радиус шара следует брать равным 6372,9 км. В этом случае относительная линейная погрешность составит 1:1200.

Эти расчёты показывают, что земной шар с единым радиусом по точности вполне удовлетворяет топографические и картографические работы. Для геодезических целей в большинстве случаев нужны более высокие точности.

Отображение эллипсоида на шар. Сферическая и сфериодическая модели Земли дополняют друг друга. При решении задач на эллипсоиде используются довольно громоздкие формулы. Поэтому во всех случаях, когда точность решаемых задач допускает, всю поверхность эллипсоида или ее часть заменяют поверхностью шара подходящего радиуса. Такая замена особенно актуальна при мелкомасштабном картографировании. Кроме того, в математической картографии применяется способ двойного проектирования, когда эллипсоид проектируется на шар, а после этого шар отображается в заданной проекции на плоскости.

Способы отображения поверхности эллипсоида на шар. При отображении эллипсоида на шар возникает задача выбора радиуса шара и способа перехода от геодезических широт B и долгот L к сферическим широтам ϕ и долготам λ . Обычно эллипсоид с шаром совмещают так, чтобы совпадали их центры, оси вращения и плоскости начальных меридианов. Тогда плоскости экваторов и плоскости всех меридианов также совпадут, и долготы не изменятся,

$$\lambda = L.$$

Преобразованию подлежат только широты. При этом их значения на полюсах и на экваторе остаются без изменений, и меняются тем сильнее, чем точки ближе к средним широтам.

Важно иметь представление об искажениях на шаре длин, площадей и углов. В этом случае частные масштабы длин m по меридианам, n по параллелям, частный масштаб площади p и максимальное искажение углов ω оцениваются формулами [2, с.65]:

$$m = \frac{R d\phi}{M dB}; \quad n = \frac{R \cos \phi d\lambda}{N \cos B dL};$$

$$p = mn; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

Масштабы m и n являются экстремальными – один из них имеет наибольшее значение, а другой – наименьшее значение. При равноугольном отображении $m = n$.

Значения сферических широт и выбор радиуса шара определяются способом отображения. Ниже рассмотрено шесть способов отображения эллипсоида на шар.

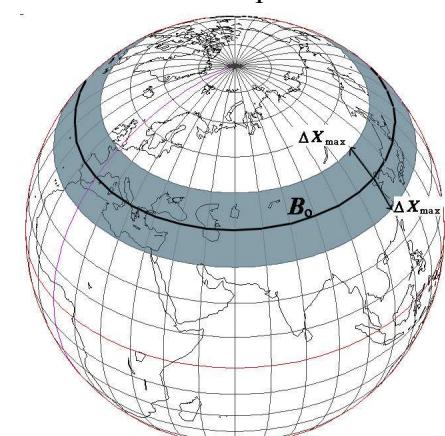


Рис.3.10. Выделение сфероидического пояса для его отображения на сфере

Отображение по нормали. Сферическая широта определяется по нормали к шару, проведённой параллельно нормали в заданной точке к эллипсоиду. Поэтому сферические и геодезические широты остаются равными друг другу:

$$\phi = B.$$

В этом способе отпадает надобность в перевычислениях не только долгот, но и широт.

На шаре искажаются углы. Однако искажения углов *не зависят* от радиуса сферы R . Их максимальное значение оценивается формулой [4, 57 с.]:

$$\omega' = 22,9' \cos^2 \phi.$$

Искажения углов максимальны на экваторе ($22,9'$) и убывают до нуля на полюсах.

Масштабы длин m по меридианам и n по параллелям зависят от отношений радиуса сферы с главными радиусами кривизны эллипсоида M и N :

$$m = \frac{R}{M}; n = \frac{R}{N}.$$

На эллипсоиде во всех точках, кроме полюсов, $M < N$. Поэтому длины отрезков более всего искажены на меридианах. В геодезических целях по нормалям проектируют не всю поверхность эллипсоида, а лишь сфероидический пояс шириной $2\Delta X$, где ΔX – половина ширины пояса, считая от средней параллели B_0 (рис. 3.10). Радиус шара приравнивают среднему радиусу кривизны эллипсоида на параллели B_0 :

$$R_o = \sqrt{M_o N_o}.$$

Тогда по формуле, верной в диапазоне широт $30\text{--}60^\circ$, можно оценить, при каких удалениях ΔX_{\max} к северу и к югу по меридиану от этой параллели относительная разность в расстояниях на эллипсоиде и на шаре не превысит заданной величины V_{\max} [6, 62 с.]:

$$2\Delta X_{\max} = 2a \sqrt[3]{\frac{6}{e^2} V_{\max}} \approx 122990 \sqrt[3]{V_{\max}} \text{ (км)}.$$

Результаты расчётов по формуле, заимствованные из книги [6, 62 с.], отражены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

Ширина сфероидического пояса, в пределах которого задачи с заданной точностью можно решать на сфере

Относительная погрешность V_{\max}	Величина макс. искажений	Ширина пояса $2\Delta X_{\max}$ (км)
10^{-8}	1 мм на 100 км	265
10^{-6}	1 мм на 1 км	1230
10^{-5}	1 см на 1 км	2650

В рамках параметров табл. 3.9 сфероидические задачи можно решать на сфере с указанной точностью. Например, все сфероидические треугольники в пределах пояса шириной 265 км можно решать как сферические с относительной погрешностью длин $|V_{\max}| = 10^{-8}$ [6, 62 с.].

2. Геоцентрическое проектирование. В этом случае из центра эллипсоида некоторым радиусом R описывается сфера и на нее проектируется поверхность эллипсоида лучами, идущими из центра этой сферы. По построению сферические широты соответствуют геоцентрическим широтам эллипсоида. Поэтому сферические широты следуют из выражения:

$$\operatorname{tg}\phi = (1 - e^2) \operatorname{tg}B.$$

Данное отображение является практически равноугольным. Наибольшее искажение углов, по оценке в [4, с. 58], около $1''$. Масштабы изображения принимают вид:

$$m = n = \frac{R}{a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

где R – радиус шара, a – большая полуось земного эллипсоида, e – его эксцентриситет.

Радиус шара влияет на величины искажений. Можно, как и в предыдущем случае, принять его равным среднему радиусу на заданной параллели B_0 . В пособии [2, с. 68] говорится о построении практически равноугольного отображения при радиусе шара $R = a$.

Если радиус шара приравнять

$$R = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_o},$$

то на этой параллели будет выполняться условие:

$$m_o = n_o = p_o = 1.$$

Формула говорит об отсутствии искажений на выбранной средней параллели.

К.Ф. Гаусс для замены геодезических вычислений на сфероиде вычислениями на шаре использовал подобное отображение, применив шар, касающийся эллипсоида по заданной параллели B_o [4, с. 59].

3. Равноугольное проектирование. Углы с поверхности эллипсоида на шар переносятся без искажений. Условием равноугольного отображения ($d\lambda = dL$) является:

$$m = n = \frac{R d\phi}{M dB} = \frac{R \cos \phi}{N \cos B}.$$

Учитывая равенство широт ϕ и B на экваторе и на полюсах, получают уравнения равенства так называемых *изометрических широт* для шара ($q_{ш}$) и для эллипсоида вращения (q):

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\cos \phi} = \int_0^B \frac{M dB}{r}.$$

$$q_{ш} = q$$

Изометрическая широта – это широта, при которой линейные масштабы в каждой точке проекции по любым направлениям становятся одинаковыми. После интегрирования для изометрических широт шара и эллипсоида получают:

$$q_{ш} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right),$$

$$q = \ln \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right)^e} \right\}.$$

Условие равенства изометрических широт равносильно следующему равенству:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \left[\frac{1 - e \sin B}{1 + e \sin B} \right]^{\frac{e}{2}}.$$

По этой формуле геодезические широты B пересчитывают в сферические широты ϕ .

Формулы частных масштабов по меридианам и параллелям принимают вид:

$$m = n = \frac{R}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 B \right), \quad p = m^2.$$

Радиус шара принимают $R = a$. Наибольшие различия сферических и геодезических широт на широте 45° . На полюсах $m \approx 1,003$. Если потребовать на широте B_o равенства частных масштабов единице, то, пренебрегая величинами большими e^2 , для радиуса шара следует принять

$$R = a \left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B_o \right).$$

Способ предложил в 1807 г. Мольвейде (Carl Brandan Mollweide, 1774-1825, математик и астроном). Равноугольным отображением эллипсоида на шар неоднократно занимался К.Ф. Гаусс.

4. Равновеликое проектирование. Выполняется под условием равенства площадей поверхностей шара и эллипсоида. Это условие приводит к требованию равенства площадей

сферических и сфериоидических трапеций, ограниченных экватором, параллелями, заданными соответственными широтами ϕ и B , и двумя меридианами с разностью долгот в один радиан (3.23). Широты находят из выражения:

$$R^2 \sin \phi = \frac{b^2}{2} \left(\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right).$$

При этом на экваторе широты

$$\phi = B = 0,$$

на полюсах

$$\phi = B = \pm \pi/2.$$

С учетом соотношений широт на Северном полюсе и симметрий эллипсоида и шара относительно экватора, для вычисления радиуса шара получается следующая формула:

$$R = b \sqrt{\left(\frac{1}{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e}{1 - e} \right) / 2}.$$

Для частных масштабов длин и максимальных искажений углов имеем [9 с. 39; 1 с. 76]:

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 B, \\ n &= 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 B, \\ \omega' &= 1146' e^2 \cos^2 B. \end{aligned}$$

Радиус R для эллипсоидов GRS-80 и Красовского указан в табл. 3.8. Наибольшие искажения на экваторе: $m \approx 1,001$, $n \approx 0,999$, $\omega \approx 7,6'$.

5. Проектирование сохранением длин параллелей. Условие отображения эллипсоида при сохранении длин его параллелей на шаре следует из требования равенства радиусов (r) соответствующих параллелей эллипсоида и шара:

$$R \cos \phi = a \cos U,$$

где U – приведенная широта эллипсоида. Поэтому при равенстве радиуса шара большой полуси эллипсоида

$$R = a,$$

сферическая широта ϕ равна приведенной широте U и вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B.$$

Искажения на шаре можно оценить по формулам [1 с.77]:

$$\begin{aligned} n &= 1, \quad m = p = 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 B + \dots \\ \omega' &= 1719' e^2 \cos^2 B. \end{aligned}$$

6. Проектирование сохранением длин меридианов. Сферическая широта вычисляется из условия равенства длин меридианов на шаре и на эллипсоиде. При этом сферическая широта вычисляется по длине дуги X меридианов эллипсоида по формуле:

$$\phi = X / R.$$

Длина дуги меридиана X протяженностью от экватора до текущей широты вычисляется по формуле (3.20). Равенство меридиональных дуг на шаре и на эллипсоиде должно сохраняться при любых широтах, в том числе и длин дуг от экватора до полюса. Для дуг от экватора до полюса ($B = \pi/2$) имеем:

$$X = C_0 \pi / 2 = R \pi / 2.$$

Отсюда следует выражение для вычисления радиуса сферы

$$R = C_0 .$$

Значения C_0 для разных эллипсоидов указаны в табл. 3.6.

Искажения на шаре можно оценить по формулам [1 с.77]:

$$m = 1, n = p = 1 - \frac{e^2}{4} \cos^2 B + \dots$$

$$\omega' = 859' e^2 \cos^2 B .$$

Источники информации по Лекции 3

1. Бугаевский Л. М. Математическая картография: Учебник для вузов направления «Геодезия», специальности «Картография». – М.: «Златоуст», 1998. -400 с.
2. Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д. Пособие по математической картографии. Труды ЦНИИГАиК. Вып. 160. М.: Недра, 1964.-456с.
3. Изотов А.А. Земной эллипсоид Красовского и связанные с ним геодезические величины. Труды ЦНИИГАиК, выпуск 72. – М.: Геодезиздат. 1950.
4. Каврайский В.В. Математическая картография. – Ленинград-Москва. Госкартотрест. 1934. -275 с.
5. Комаровский Ю. А. Использование различных референц-эллипсоидов в судовождении [Электронный ресурс], (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://sveos.msun.ru/edu/lit/kaf/tss/ell.pdf>
6. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. Учебник для вузов. – М.: Недра, 1979. –260 с.
7. Серапинас Б. Б. Геодезические основы карт. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. -132 с.
8. Серапинас Б. Б. Практикум по геодезическим основам карт. Учебное пособие. М.: Географический факультет МГУ. 2008. -146 с.
9. Соловьев М.Д. Математическая картография. – М.: Недра. 1969. -287 с.
10. Moritz H. GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980 [Электронный ресурс]. (Дата обращения 22.05.2014). URL: <http://www.gfy.ku.dk/~iag/handbook/geodeti.htm>
11. The available geographic coordinate systems. esriSRGeoCSType Constants. [Электронный ресурс] (Дата обращения 24.05.2014). URL: <http://edndoc.esri.com/arcobjects/9.1/default.asp?URL=/arcobjects/9.1/componenthelp/esrigeomentry/esrisrgeocstype.htm>

Контрольные вопросы

1. Перечислите используемые широты. Для чего они предназначены? Как они связаны взаимно?
2. Наклонные и нормальные сечения. Взаимные нормальные сечения. Геодезическая линия. Радиусы эллипсоида. Как получены их формулы? Где их используют?
3. Вычисление длин дуг параллелей. Вычисление длин дуг меридианов – численные способы, строгая формула и её вид. Вычисление геодезической широты по длине дуги меридиана. Вычисления площадей сфероидических трапеций и треугольников.
4. Радиус всего земного шара. Как он получен?
5. Отображение эллипсоида на сфере. Способы отображения и используемые при этом радиусы шара. Искажения на шаре при разных отображениях.